Esercizi su integrali di superficie

Esercizio 1. Sia $R > 0$. Si consideri la superficie (detta *finestra di Viviani*) $\mathcal{S}$ data dalla porzione di superficie sferica $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = Rx$. Si calcoli l'area di S.

Svolgimento. Nella definizione di $\mathcal{S}$ è implicito che si sta considerando la porzione di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nel semispazio $\{z \geq 0\}$. Allora

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leq Rx\right\}. \tag{1}$$

Si osservi che

$$x^2 + y^2 \leq Rx \ \Leftrightarrow\ x^2 - Rx + \frac{R^2}{4} + y^2 \leq \frac{R^2}{4} \ \Leftrightarrow\ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4},$$

consideriamo cioè il cilindro solido retto con generatrici parallele all'asse z e base sul piano xy data dal disco

$$D \ : \ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}$$

di centro $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{R}{2}$.

Da (1) si arriva alla rappresentazione cartesiana di $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \ : \ z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{con } (x, y) \in D,$$

da cui ricavo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2 \iint_{D_+} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

ove l'ultimo passaggio segue dal fatto che la funzione integranda è pari in y e D è simmetrico rispetto all'asse delle y (ma non rispetto all'asse delle x!!), infatti D_+ è

$$D_+ = D \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0\right\}.$$

Calcolo l'ultimo integrale passando alle coordinare polari, osservando che

$$x^2 + y^2 \leq Rx,\ y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^2 \leq R\rho\cos(\vartheta) & \Leftrightarrow \quad \rho \leq R\cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right] \\ \rho\sin(\vartheta) \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \vartheta \in [0, \pi] \end{cases}$$

Quindi

$$D_+ \to \tilde{D} \ : \ \begin{cases} \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 \leq \rho \leq R\cos(\vartheta), \end{cases}$$

e calcolo

$$\begin{aligned}\iint_{D_+} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\tilde{D}} \frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{R\cos(\vartheta)} \frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left[-R\sqrt{R^2-R^2\cos^2(\vartheta)}\right]\mathrm{d}\vartheta = \ldots = R^2\frac{\pi}{2}-R^2.\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = 2\left(R^2\frac{\pi}{2}-R^2\right) = R^2(\pi-2).$$

Esercizio 2. Si consideri la superficie cartesiana

$$\mathcal{S}: \; z = f(x,y) = x^2 - \cos(y), \quad (x,y)\in T,$$

con T il triangolo chiuso nel piano xy di vertici $A=(2,0)$, $B=(0,3)$, $C=(0,-2)$.
Si calcoli

$$I = \iint_{\mathcal{S}} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$
$$\text{con } \; g(x,y,z) = (z+\cos(y))\left(1+4x^2\sin^2(y)\right)^{-1/2}$$

Svolgimento. Dalla rappresentazione cartesiana esplicita di S ricavo

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(y)\end{cases} \quad \Rightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}$$
$$= \sqrt{1+4x^2+\sin^2(y)}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \iint_T g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_T \left(x^2-\cos(y)+\cos(y)\right)\frac{\left(1+4x^2+\sin^2(y)\right)^{1/2}}{\left(1+4x^2+\sin^2(y)\right)^{1/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_T x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

T è dominio normale rispetto all'asse x:

$$T: \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x-2 \le y \le 3-\frac{3}{2}x\end{cases}$$

Quindi

$$I = \int_0^2\left(\int_{x-2}^{3-\frac{3}{2}x} x^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\left(3-\frac{3}{2}x-x+2\right)\mathrm{d}x = \int_0^2\left(5x^2-\frac{5}{2}x^3\right)\mathrm{d}x = \ldots = \frac{10}{3}$$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{S}$ la semisfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 4 contenuta nel semispazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z \leq 0\}$. Si calcoli

$$I = \iint_{\mathcal{S}} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S, \qquad \text{con} \;\; g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

Svolgimento. La rappresentazione cartesiana <u>implicita</u> di $\mathcal{S}$ è

$$x^2+y^2+z^2 = 16$$

allora la restrizione di g a $\mathcal{S}$ è

$$g|_{\mathcal{S}}(x,y,z) = 16^{1/2} = 4$$

quindi

$$I = \iint_{\mathcal{S}} 4\,\mathrm{d}S = 4 \,\cdot\, \mathrm{area}(\mathcal{S})$$

Essendo $\mathcal{S}$ una <u>semisfera</u> di raggio $r = 4$

$$\mathrm{area}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 32\pi \;\Rightarrow\; I = 128\pi$$
